

Sampling & Graphical Model

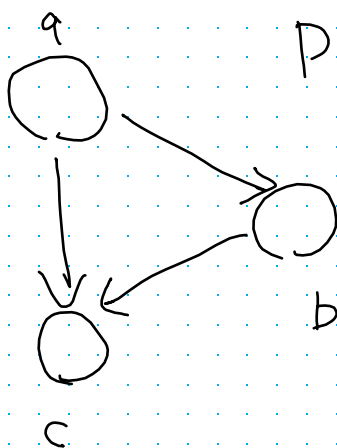
同時確率分布 Joint probability distribution

or

同時分布 Joint distribution

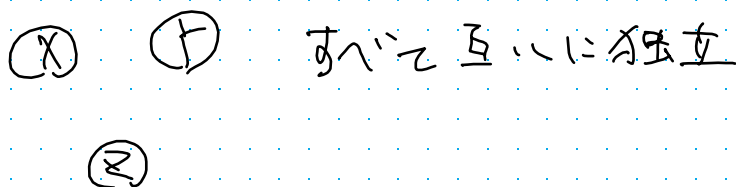
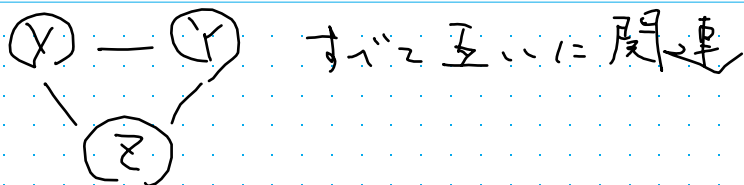
or 系集合分布、結合確率分布

有向グラフ (ベイジアンネットワーク)

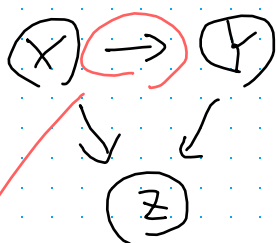


$$p(a, b, c) = p(c | a, b) \times p(a, b)$$

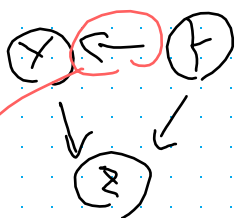
$$= p(c | a, b) \times p(b | a) p(a)$$



有向グラフ化



$$p(x, y, z) = p(x) p(y|x) p(z|x, y)$$



$$p(x, y, z) = p(y) p(x|y) p(z|x, y)$$

乗法原理により、このように展開していきます。

区別のつかない

⇒ 無向グラフで統一

Markov Random Field

MRF

無向グラフカルモデル

Bayesian Network

有向グラフカルモデル

$$P(x|y) =$$

$$\frac{P(y|x) P(x)}{P(y)}$$

これは事後
分布のこと

観測が生成したプロセスを表現
する分布のこと



$P(x_1|y_1)$
推測

例、
因果関係



など



$$P(x_1, x_2)$$

$$= P(x_2 | x_1) P(x_1)$$

$$= P(x_1 | x_2) P(x_2)$$

など

など

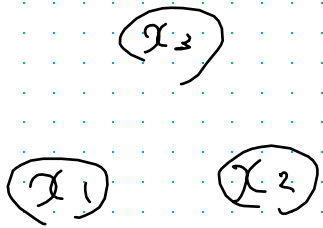
など

$$P(x_1, x_2 | x_3) = P(x_1 | x_3) \times P(x_2 | x_3)$$

$$(x_1 \perp x_2 \mid x_3 \text{ 条件付き独立})$$

無関係

(a)



$$P(x_1, x_2, x_3) = P(x_1)P(x_2)P(x_3)$$

互いに
独立

(b)

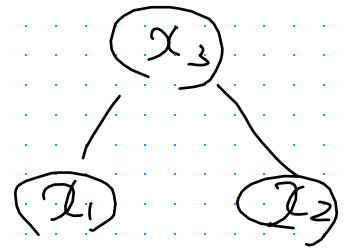


$$P(x_1, x_2, x_3) = P(x_1, x_2 | x_3) P(x_3)$$

互いに

直接関係

(c)



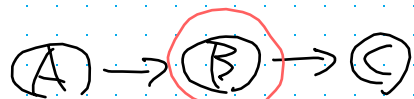
$$P(x_1, x_2, x_3) = P(x_1 | x_3) P(x_2 | x_3) P(x_3)$$

条件付き独立



計算コストと精度の
trade off の 1 = best

Head-to-Tail



$$P(A, B, C) = P(A)P(B|A)P(C|B)$$

Tail-to-Tails

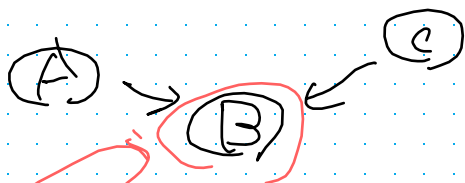


$$P(A, B, C) = P(B)P(B|C)P(B|A)$$

$a \perp\!\!\!\perp c \mid b$

条件が独立

Head-to-head



$$P(A, B, C) = P(A)P(C)P(B|A, C)$$

$$P(A, C|B) = \frac{P(A)P(C)P(B|A, C)}{P(B)}$$

条件が独立ではない $P(A, C|B) =$

$P(C|B)P(A|B)$ に分解できない

条件が独立ではない $A \not\perp\!\!\!\perp C \mid B$

cに与えられたとき

aとbはcに統計的に独立である。

$$\boxed{a \perp b \mid c} \quad \text{と書ける。}$$

$$p(a, b \mid c) = p(a \mid b, c) p(b \mid c)$$

$$= p(a \mid c) p(b \mid c)$$

$$p(a, b) = p(a \mid b) p(b)$$

Subject

Date

Attendants

2
有効分離

Cを条件、 A と B の集合

A と B が独立か?

$A \rightarrow B$ のすべての経路を考察

$y_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ とし y は $\mathcal{N}$ の n 個の観測値とする

y_i に $!!$ の仮定 $Y = (y_1, \dots, y_n)$

$$p(\mu) = \text{Normal}(0, 10000)$$

$$p(\sigma) = \text{HalfCauchy}(0, 5)$$

$$P(Y | \mu, \sigma) = \prod_{i=1}^n \text{Normal}(y_i, \mu, \sigma)$$

$y_1, \dots, y_n, \mu, \sigma$ の同時分布 $p(Y, \mu, \sigma)$

$$\begin{aligned} p(Y, \mu, \sigma) &= p(Y | \mu, \sigma) p(\mu, \sigma) \\ &= p(Y | \mu, \sigma) p(\mu) p(\sigma) \end{aligned}$$

μ, σ
が独立

$\mathcal{N}(0, 10^4)$



$\text{HalfCauchy}(0, 5)$



(μ, σ) は観測可能な
確率変数ではない

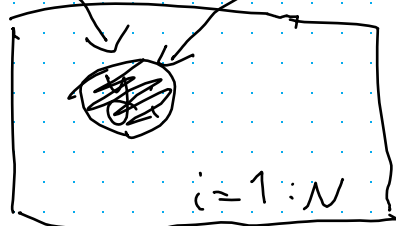


plate expression

4元のとき

$$\begin{aligned} P(\gamma, \mu, \sigma) &= P(\mu, \sigma | \gamma) P(\gamma) \\ &= P(\gamma | \mu, \sigma) P(\mu) P(\sigma) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} P(\gamma, \mu, \sigma) &= P(\mu, \sigma | \gamma) P(\gamma) \\ &= P(\gamma | \mu, \sigma) P(\mu) P(\sigma) \end{aligned}} \right\}$$

この式を変形して

$$P(\mu, \sigma | \gamma) = \frac{P(\gamma | \mu, \sigma) P(\mu) P(\sigma)}{P(\gamma)}$$

ここで $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N z_i^2 = \gamma$?

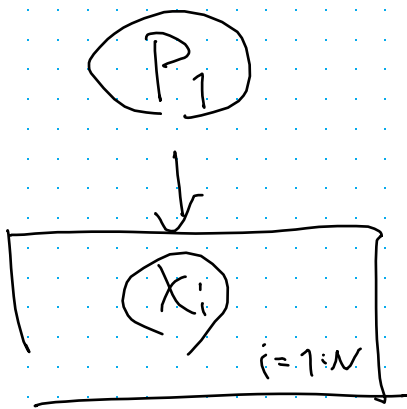
binary random variables

↔ Bernoulli Distribution

$$X \sim \text{Bern}(p_1)$$

$$X = \{x_1, \dots, x_N\}$$

$$p(X, p_1) = p(X | p_1) p(p_1)$$



$$p(X, p_1) = p(p_1) \prod_{i=1}^N p(x_i | p_1)$$

ベイズネットワークの確率推論

観測された変数 e による求めたい確率変数の posterior $P(x|e)$ を求め x の期待値や MAP 推定などを行う

サリコリネット (確率推論の仕組み)

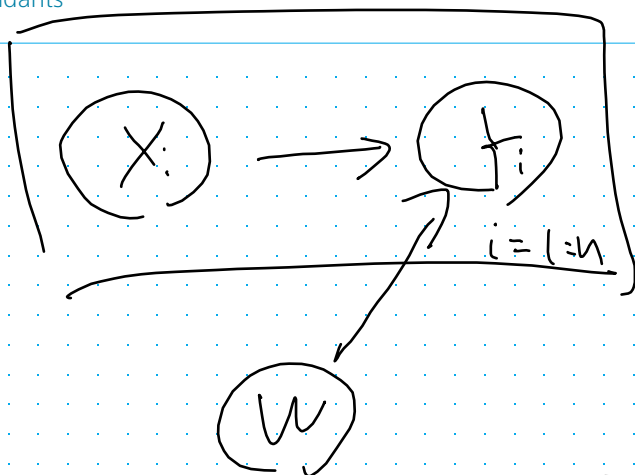
joint-distribution を事前決定して

その確率に基づいて確率変数の具体化の

集合をよび取って生成する

$$\rightarrow \text{頻度でかいてあげて} \quad P(x|e) = \frac{P(e|x)P(x)}{P(e)}$$

事後確率を求める



head to head
if we observe

Joint distribution as follows

$$P(w, Y | X) = P(w) P(Y | X, w)$$

$$\phi(x, w) = p$$

Let $p(Y | X, w)$ be $\text{Bern}(Y, \phi(x, w))$ and $p(w) = \text{beta}(0, 1)$

$$P(w | X, Y) = \frac{P(w) P(Y | X, w)}{\int P(w) P(Y | X, w) dx} = P(Y)$$

$$P_{\text{Beta}} = \frac{1}{2} \underbrace{\text{beta}(0, 1)}_{\text{conjugate prior}} \underbrace{\text{Bern}(Y, \phi(x, w))}_{\text{conjugate prior}}$$

$$P(Y) = \int P(w) P(Y | X, w) dx$$

sample from above equation?

Integration

$X = \{x_1, \dots, x_N\}$ for calc marginal likelihood

$$p(X|\theta)$$

"
evidence

approximately

$$P(X) = \int p(\theta) p(X|\theta) d\theta$$

$$\approx \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N p(X|\theta^{(t)})$$

x_n follows bernoulli dist

$$p(x_n|\theta) = \text{Bern}(x_n|\theta)$$

$$p(\theta) = \text{beta}(\alpha, \beta)$$

$$P(X) = \int \text{beta}(\theta|\alpha, \beta) \prod_{i=1}^N \text{Bern}(x_i|\theta) d\theta$$

$$= C_{\beta} \int_0^1 \theta^{m+\alpha-1} (1-\theta)^{N-m+\beta-1} d\theta$$